Polinomios y Ecuaciones

Talleres de la Olimpiada

17/11/17

Importante al trabajar con polinomios:
1. **Teorema**: Sea P un polinomio con **coeficientes enteros**, sean a, b números enteros con $a \neq b$, entonces se tiene que: $(a-b)|(P(a)-P(b))$
2. **Relaciones de Cardano-Vieta**, **Teorema del Resto**, **Ruffini**, **etc...**
3. *Have fun!*

1 PROBLEMAS

0. ¿Polinomio de coeficientes enteros con $P(1000) = 1000, P(3000) = 4000$?

1. Hallar las soluciones enteras de la ecuación:

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

2. Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema:

$$2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1$$

$$2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1$$

$$2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1$$

3. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que para $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

4. Halla los valores del número real a para que todas las raices del polinomio:

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$

sean números enteros.

5. $P(x) = x^3 - x + k$ tiene sus tres raíces enteras, determina k.

6. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), ..., P(k)$ es divisible por k entonces P no tiene raices enteras.

7. En la gráfica de un polinomio con coeficientes enteros elegimos dos puntos con coordenadas enteras. Prueba que si la distancia entre ambos es un entero, entonces el segmento que los conecta es paralelo al eje de ordenadas.

8. Sea $n \geq 1$ y $P(x)$ polinomio de coeficientes enteros, que cumple que $P(1), P(2), ...P(n)$ son $1, 2, ..., n$, no necesariamente en el mismo orden, prueba $P(0)$ o $P(n+1)$ es múltiplo de $n!$

9. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y sea n un entero positivo impar. Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ una secuencia de enteros tal que $P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3, ..., P(x_{n-1}) = x_n, P(x_n) = x_1$. Prueba que todos los x_i's son iguales.

10. A y B juegan un juego con un polinomio de grado mayor o igual que 4:

$$x^{2n} + \square x^{2n-1} + \square x^{2n-2} + \cdots + \square x + 1$$

Por turnos, rellenan las cajas vacias con número reales. Si el polinomio resultante no tiene raices reales entonces A gana, en caso contrario gana B. ¿ Quién tiene estrategia ganadora si A juega primero?

11. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Definimos una secuencia $a_0, a_1, ...$ de enteros tal que $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = f(a_n)$ para todo $n \geq 0$. Prueba que si existe un entero positivo m para el cuál $a_m = 0$ entonces $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$.

12. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros, y sea k un entero positivo. Consideramos el polinomio $Q(x) = P(P(...P(P(x))...))$, donde P ocurre k veces. Prueba que hay a lo sumo n enteros t tal que $Q(t) = t$.